2. La distancia entre dos puntos en la recta numérica y el plano cartesiano

En los ejercicios interactivos anteriores lograste ubicar la posición del autobús para recoger a los alumnos en distintas posiciones dentro del plano cartesiano. Ahora, imagina que tienes que calcular la distancia que debe recorrer el autobús para recoger a todos los alumnos. En este caso lo primero es definir la recta que conecta los puntos y luego calcular el tamaño de esta recta, formalmente, se define como el *cálculo de la magnitud del segmento de recta que une a los puntos*.

Para comprender la noción de distancia entre puntos podemos comenzar con la recta numérica. Se define la operación de distancia entre dos puntos, **A** y **B**, con la sintaxis: ***d*(A, B).**

-Distancia entre un punto y el origen

En el primer caso se considera la distancia de dos puntos, A y B, uno se encuentra ubicado en el origen y el otro en una posición positiva, por ejemplo, 3. En este caso la longitud del segmento que los une corresponde al valor de la posición del punto B.

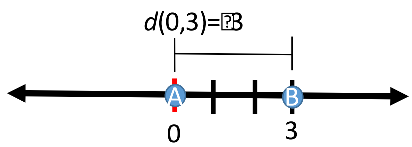

Figura 8. Distancia entre dos puntos en la recta numérica, primer caso.

En un segundo caso el punto se encuentra en una posición negativa. En este caso la distancia equivale al valor de la posición del punto sin considerar el signo.

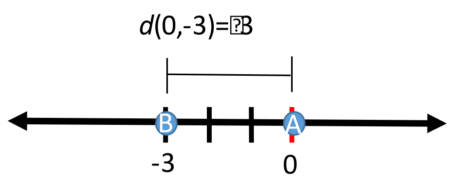

Figura 9. Distancia entre dos puntos en la recta numérica, segundo caso.

La razón de no considerar el signo para definir la distancia es debido a que esta es siempre una magnitud positiva.

De estos dos casos, se puede concluir que la distancia entre un punto cualquiera en la recta numérica y la distancia a un punto en el origen es igual al valor del punto sin considerar el signo; recordando que la distancia es una cantidad positiva. Al recorrer un maratón se cuentan 41 kilómetros, y no -41 kilómetros.

Al calcular la distancia en la recta numérica estamos utilizando un valor absoluto, y esta se calcula por la diferencia en la posición de cada punto. Del ejemplo anterior, se tiene el cálculo de la distancia de forma general como,

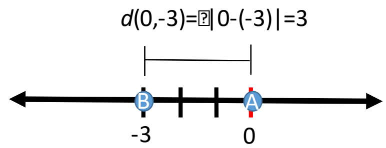

Figura 10. Cálculo de la distancia entre dos puntos

En conclusión, la distancia entre dos puntos se define como la diferencia de la posición de cada punto y al resultado se le aplica el valor absoluto.

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B})=|\mathrm{A}-\mathrm{B}| \qquad \text{Ecn. (1)}$$

-La distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Para calcular la distancia en el plano cartesiano el procedimiento es distinto, se requiere del uso del teorema de Pitágoras; llamado así en honor al filósofo y matemático Pitágoras de Samos (569-475 a.C). Este teorema se aplica a los triángulos rectángulos y relaciona las longitudes entre los catetos y la hipotenusa. Esta relación dice que *para todo triángulo rectángulo, el lado mayor (**hipotenusa**) al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los lados que conforman el ángulo recto (**catetos**).*

Pitágoras descubrió que si se colocaba un cuadrado sobre cada uno de los lados resultaba que al sumar el área de los cuadrados más pequeños resulta el área del cuadrado más grande. Esta relación se expresa matemáticamente en la figura.

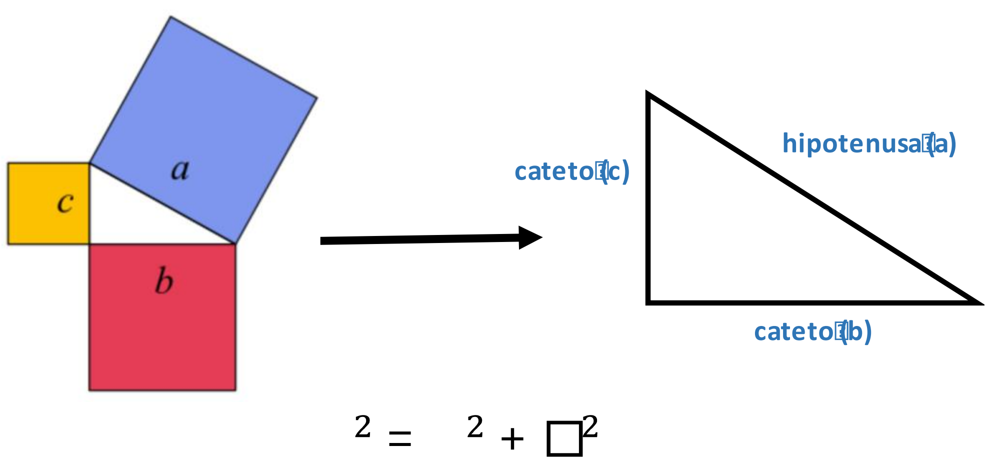

Figura 11. Puedes observar lo mismo que vio Pitágoras. El lado más grande corresponde a la hipotenusa (a), mientras que los lados más pequeños son los catetos (b y c).

Con base en el teorema de Pitágoras es posible calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. La intención es construir un triángulo rectángulo. Considera dos puntos cualesquiera, P_1 y P_2, en el plano:

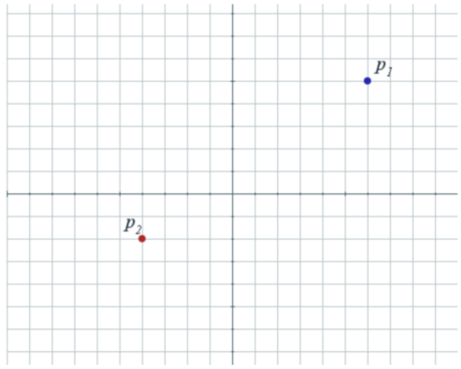

Figura 12. Dos puntos en el plano

Al unir a los dos puntos con una línea recta, la distancia entre los dos puntos corresponde a la longitud del segmento de la recta que los conecta, y esta longitud se denota como $\overline{p_1 p_2}$

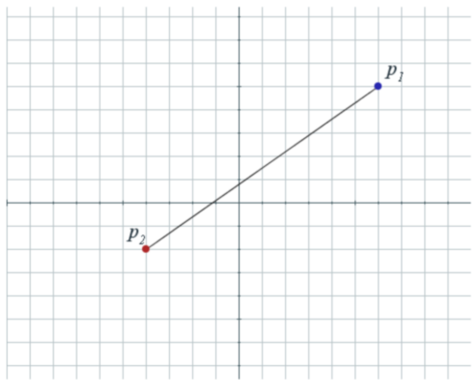

Figura 13. Los dos puntos son unidos con una línea recta

Para encontrar la forma de determinar la distancia del segmento que une dos puntos se dibuja una recta paralela al eje Y y que pase por el punto P_1 y una recta paralela al eje X que pase por el punto P_2; el punto donde se intersectan las rectas que se dibujaron se le denomina P_3.

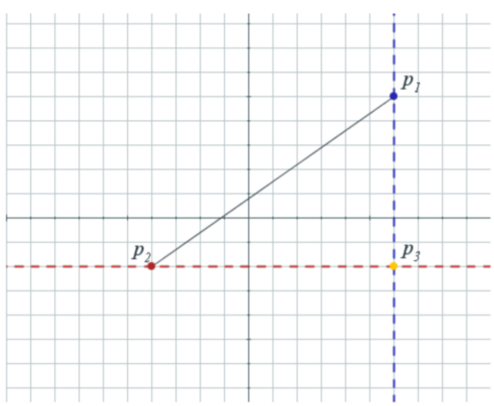

Figura 14. Al extender un par de rectas por los dos puntos se observa la proyección de un triángulo rectángulo en el plano cartesiano.

Observa en la Figura 15 que ahora se tienen tres segmentos los cuales forman un triángulo rectángulo. Para encontrar un triángulo semejante al de la figura anterior, a cada segmento se le asignara una letra, entonces se tiene:

$$\overline{p_1 p_2} = a$$
$$\overline{p_2 p_3} = b$$
$$\overline{p_1 p_3} = c$$

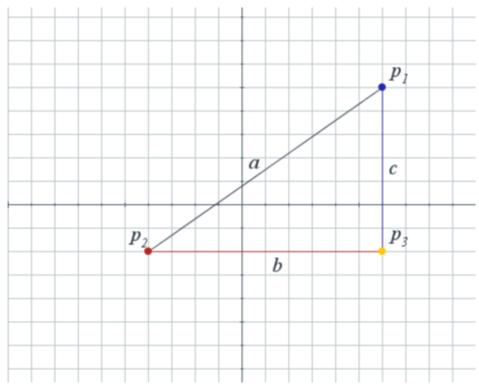

Figura 15. Renombrando los convenientemente los lados del triángulo proyectado en el plano puedes distinguir cuales son los catetos e hipotenusa.

En la Figura 16 el segmento a corresponde a la hipotenusa y los segmentos b y c los catetos. Para poder calcular la distancia es necesario obtener las coordenadas de cada punto, supongamos que las coordenadas para el punto P_1 son (x_1,y_1), las coordenadas del punto P_2 son (x_2,y_2), y por la forma en que construimos el punto P_3 sus coordenadas son (x_1,y_2).

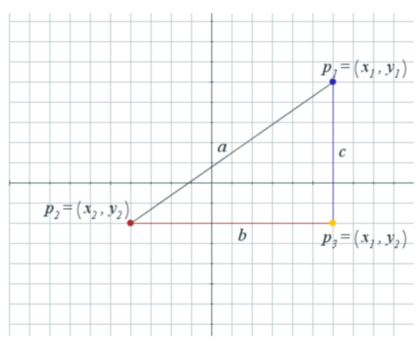

Figura 16. Las coordenadas de los tres vértices del triángulo.

A partir de utilizar la ecuación para calcular la distancia entre dos puntos en la recta numérica, d**(A,B)=|A−B|,** y con base en el teorema de Pitágoras se puede deducir la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Para calcular el tamaño del segmento b, que corresponde a la distancia entre los puntos P_2 y P_3 , primeramente hay que observar que poseen la misma coordenada en y; puedes visualizas que estos dos puntos se encuentran sobre una recta numérica. Aplicando la fórmula para calcular la distancia en la recta numérica se tiene,

$$d(P_2, P_3)=|x_1-x_2|=b \qquad \text{Ecn. (2)}$$

De manera semejante, se puede calcular el tamaño de segmento c, que corresponde la distancia entre los puntos P_1 y P_3, en este caso estos puntos comparten el mismo valore de la abscisa x, se puede deducir que,

$$d(P_1, P_3) = |y_1 - y_2| = c \qquad \text{Ecn. (3)}$$

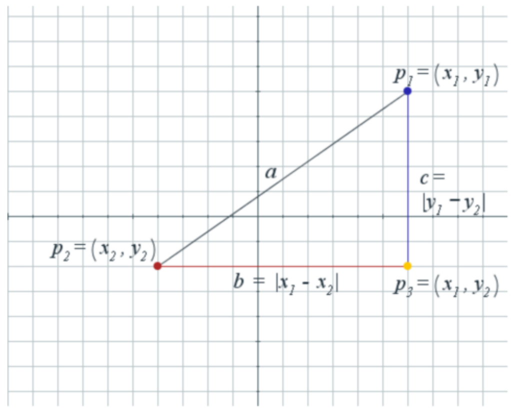

Figura 17. Cálculo de la distancia entre los puntos.

Recuerda que el teorema de Pitágoras se expresa como:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{Ecn. (4)}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para calcular la distancia se tiene la ecuación,

$$a^2 = (|x_1 - x_2|)^2 + (|y_1 - y_2|)^2 \qquad \text{Ecn. (5)}$$

Puesto que el cuadrado de un número siempre es positivo se puede omitir el valor absoluto llegando a la expresión,

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad \text{Ecn. (6)}$$

Ten en mente que lo que se quiere calcular es la distancia entre los dos puntos, P_1 y P_2, y que corresponde al segmento a, por lo tanto es necesario manipular la ecuación para despejar la variable que se busca, aplicando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación se tiene que,

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \text{Ecn. (7)}$$

Regresando a la definición de distancia y recordando que corresponde a $d(P_1, P_2)$, la fórmula final es,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \text{Ecn. (8)}$$

Al definir que P_1 y P_2 son dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano, la formula anterior es la fórmula general para calcular la distancia entre dos puntos sobre el plano cartesiano

Referencias

[1] Taller interactivo de Matemáticas. Campus virtual UAM- Cuajimalpa. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/09_Plano_cartesiano_html/index.html#

[2]Olvera, R. Plano cartesiano y la recta. UAM Cuajimalpa.