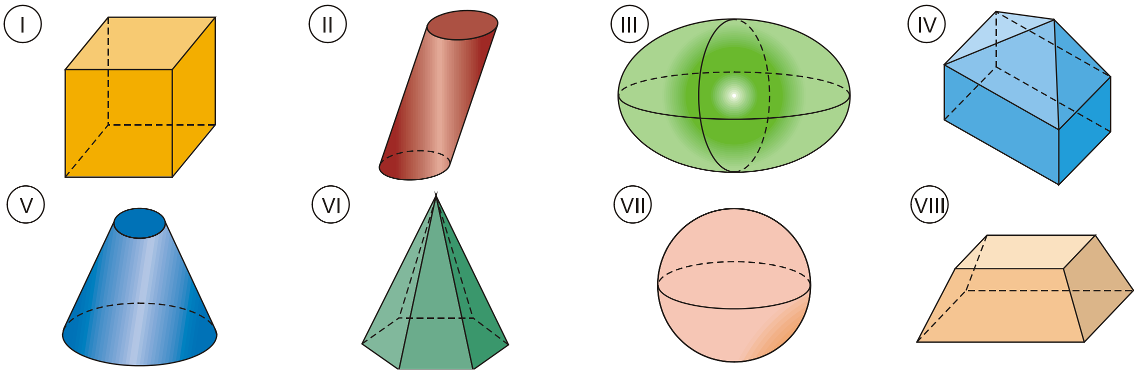
POLIEDROS

Ejercicio nº 1.-

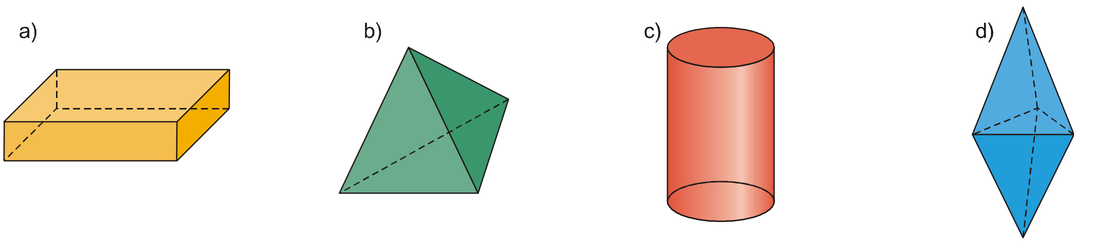
a) De los siguientes cuerpos geométricos, di cuáles son poliedros y cuáles no. Razona tu respuesta.



b) ¿Cuál es la relación (llamada fórmula de Euler) que hay entre el número de caras, de vértices y de aristas en un poliedro simple?

Ejercicio nº 2.-

Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes figuras son poliedros regulares o no:



(4 triángulos equiláteros)

(6 triángulos equiláteros)

Ejercicio nº 3.-

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En las que sean falsas, explica por qué:

a) Un cilindro es un poliedro.

b) En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras.

c) Una pirámide de base pentagonal es un poliedro.

d) Un poliedro tiene al menos diez aristas.

e) Una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular.

Ejercicio nº 4.-

a) ¿Existe algún poliedro regular cuyas caras sean pentágonos regulares? Si existe alguno, di cuál es; y si no existe, explica por qué.

b) ¿Existe algún poliedro regular cuyas caras sean hexágonos regulares? Si existe alguno, di cuál es; y si no existe, explica por qué.

Ejercicio nº 5.-

Completa:

a) Un poliedro simple con 6 caras y 8 vértices tiene un total de __________aristas.

b) ¿Qué relaciones hay entre dos poliedros duales? ______________________________

____.

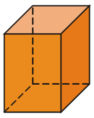
c) El _________ y el octaedro son poliedros duales.

d) El dodecaedro y el _____________ son poliedros duales.

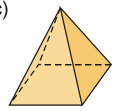
e) El ______________ es dual de sí mismo.

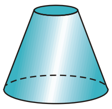
Ejercicio nº 6.-

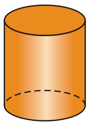
Indica cuál de las siguientes figuras se corresponde con cada uno de estos desarrollos planos y dibuja el desarrollo plano que falta:

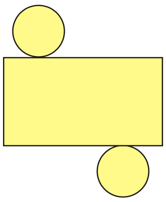
a) 

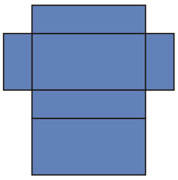
b) 

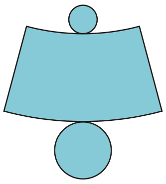
c) 

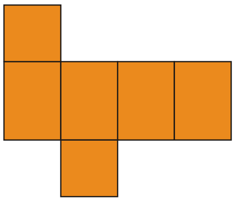
d) 

e) 

I 

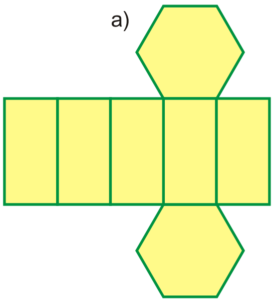
II 

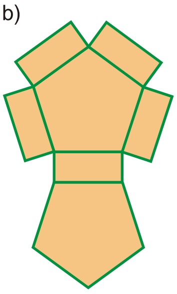
III 

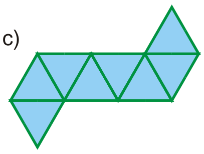
IV 

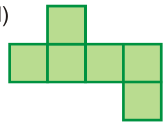
Ejercicio nº 7.-

De los siguientes desarrollos planos, indica cuáles corresponderían a prismas y cuáles no. En los que no, explica el porqué:

a) 

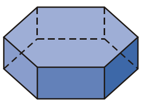
b) 

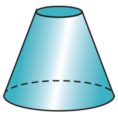
c) 

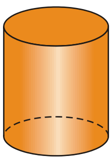
d) 

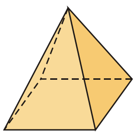
Ejercicio nº 8.-

Dibuja el desarrollo plano de cada una de estas figuras:

a) 

b) 

c) 

d) 

__Ejercicio nº 9.-__

Dibuja cada una de estas figuras y su desarrollo plano:

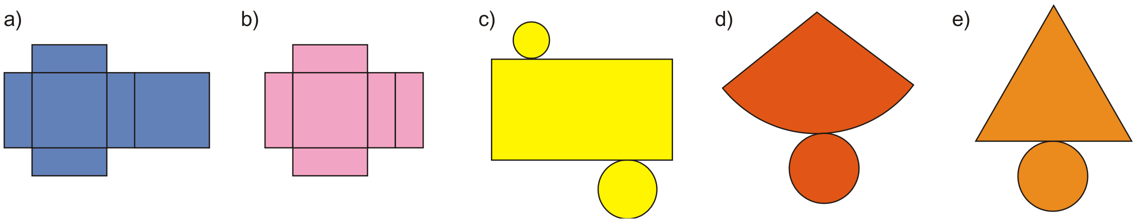
a) Prisma triangular regular.

b) Pirámide cuadrangular regular.

c) Cono.

__Ejercicio nº 10.-__

Indica, para cada una de estas figuras, si puede corresponder a un poliedro, a un cuerpo de revolución o a ninguno de ellos:



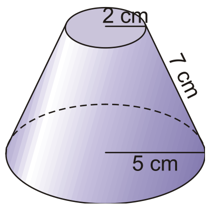
__Ejercicio nº 11.-__

a) Las dimensiones de un ortoedro son 5 cm, 6 cm y 7 cm, respectivamente. Sin hacer operaciones, explica por qué su diagonal no puede medir 5 cm.

b) Calcula cuánto mide la diagonal del ortoedro anterior.

__Ejercicio nº 12.-__

Halla la altura de este tronco de cono:

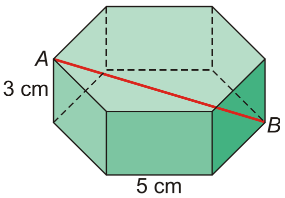


__Ejercicio nº 13.-__

Halla la generatriz de un cono, sabiendo que su altura es de 8 cm y que la longitud de la base es de 18,84 cm.

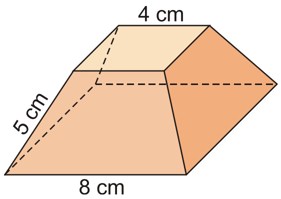
__Ejercicio nº 14.-__

Halla la longitud del segmento *AB*:



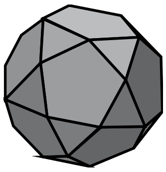
Ejercicio nº 15.-

Halla la altura del siguiente tronco de pirámide con bases cuadradas:



Ejercicio nº 16.-

Observa el siguiente poliedro y descríbelo. Identifica de qué poliedros regulares se puede partir así como el tipo de truncamiento realizado para obtener este poliedro. ¿Cómo se llama?



Ejercicio nº 17.-

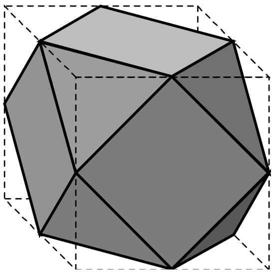
Partiendo del cubo, dibuja el poliedro que se obtiene en cada caso, nómbralo y descríbelo:

a) **Truncando por los puntos medios de las aristas del cubo.**

b) **Truncando de la forma que cada cara se transforme en un octógono regular.**

Ejercicio nº 18.-

Observa el siguiente poliedro y descríbelo. Identifica de qué poliedros regulares se puede obtener así como el tipo de truncamiento que se realiza en ellos, para llegar a este poliedro. ¿Qué nombre recibe?



Ejercicio nº 19.-

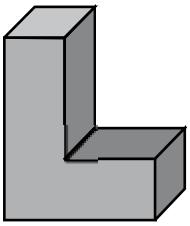
Explica cómo se ha de truncar el octaedro para obtener el octaedro truncado. ¿Es un poliedro semirregular?

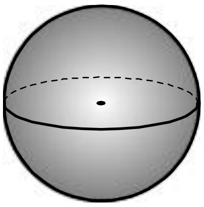
Ejercicio nº 20.-

Explica cómo se ha de truncar el dodecaedro para obtener el dodecaedro truncado. ¿Es un poliedro semirregular?

__Ejercicio nº 21.-__

a) ¿Cuáles son los planos de simetría de las siguientes figuras?





b) Identifica los ejes de giro del octaedro.

__Ejercicio nº 22.-__

Dibuja las siguientes figuras espaciales e identifica en cada caso cuántos planos de simetría y ejes de giro tienen:

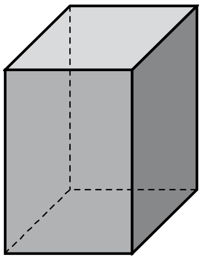
a) Tronco de pirámide cuadrangular regular.

b) Cono.

__Ejercicio nº 23.-__

a) Dibuja una semiesfera e identifica sus planos de simetría.

b) La siguiente figura es un ortoedro con dos dimensiones iguales. ¿Cuáles son sus ejes de giro?¿De qué orden son?

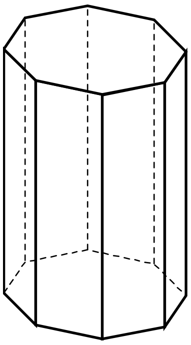


__Ejercicio nº 24.-__

El siguiente poliedro es un prisma octogonal regular.

a) ¿Cuántos planos de simetría tiene?

b) ¿Qué ejes de giro tiene? ¿De qué orden?



Ejercicio nº 25.-

Dibuja las siguientes figuras espaciales e identifica en cada caso cuántos planos de simetría y ejes de giro tienen.

a) Pirámide cuadrangular regular.

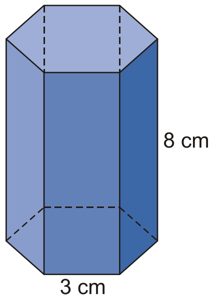
b) Tronco de cono.

ÁREAS DE FIGURAS EN EL ESPACIO

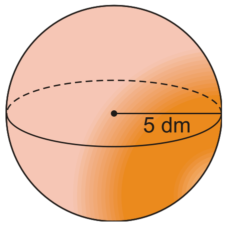
Ejercicio nº 26.-

Halla el área total de cada una de estas figuras:

a)



b)



Ejercicio nº 27.-

Halla la superficie total en cada caso:

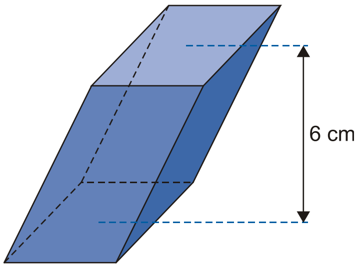
a) Tetraedro regular de 4 cm de arista.

b) Cilindro de altura 4 cm y cuyo radio de la base mide 2 cm.

Ejercicio nº 28.-

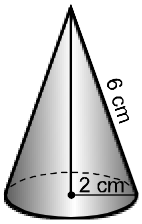
Calcula la superficie total de cada una de estas figuras:

a)



La base es un rombo de diagonales $D = 7$ cm y $d = 3$ cm.

b)



Ejercicio nº 29.-

Halla el área total de cada una de estas figuras:

a) Icosaedro de 3 dm de arista.

b) Cilindro de 9 cm de altura y 3 cm de radio de la base.

Ejercicio nº 30.-

Calcula la superficie total en cada caso:

a) Pirámide cuadrangular regular de 3 cm de altura y 8 cm de lado de la base.

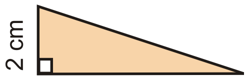
b) Esfera de 8 m de diámetro.

Ejercicio nº 31.-

Halla la superficie total de las siguientes figuras:

a) Tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases tienen de lados 2 dm y 1,5 dm, y cuya altura mide 1,2 dm.

b) El cono que se obtiene haciendo girar alrededor del cateto más largo el siguiente triángulo rectángulo:



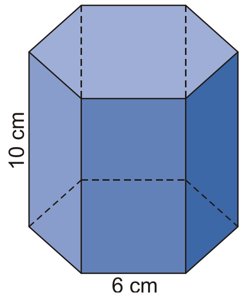
Ejercicio nº 32.-

Calcula cuántos metros cuadrados de tela necesitaremos para las pantallas (en forma de tronco de cono) de dos lámparas iguales, sabiendo que la altura medirá 22 cm; la longitud de una base 72,22 cm y la de la otra 47,1 cm (toma $\pi = 3,14$).

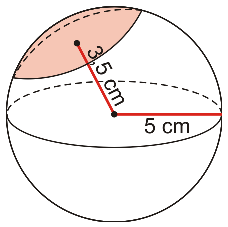
Ejercicio nº 33.-

Calcula el área total de:

a) Una pirámide regular cuya base y altura coinciden con las del siguiente prisma:

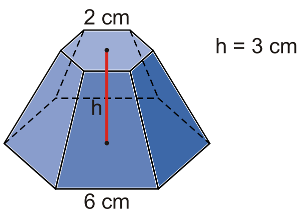


b) El siguiente casquete esférico:



Ejercicio nº 34.-

Halla el área total de este tronco de pirámide:

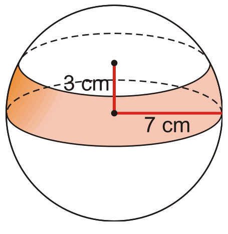


Ejercicio nº 35.-

Halla el área total de:

a) Un ortoedro que mide 3 cm de ancho; 3,5 cm de alto y cuya diagonal mide 6,8 cm.

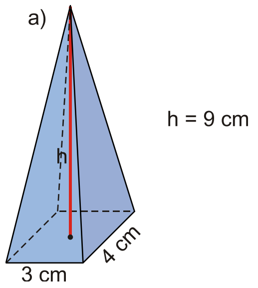
b) La siguiente zona esférica:

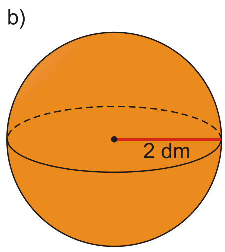


CÁLCULO DE VOLUMENES

Ejercicio nº 36.-

Halla el volumen de estas figuras:





Ejercicio nº 37.-

Halla el volumen de las siguientes figuras:

a) Un prisma de 7 cm de altura, cuyas bases son rombos de diagonales 6 cm y 4 cm.

b) Un cilindro de 5 cm de altura, cuyo radio de la base mide 2 cm.

Ejercicio nº 38.-

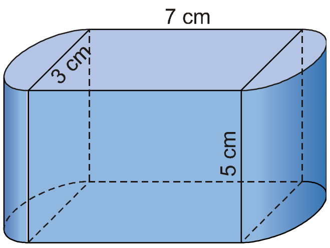
Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

a) Un cono con 2 cm de radio de la base y 5 cm de altura.

b) Un prisma de base cuadrada, de 6 cm de altura, cuyo lado de la base mide 3 cm.

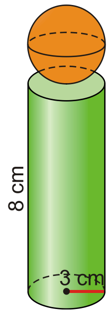
Ejercicio nº 39.-

Calcula el volumen del siguiente cuerpo:



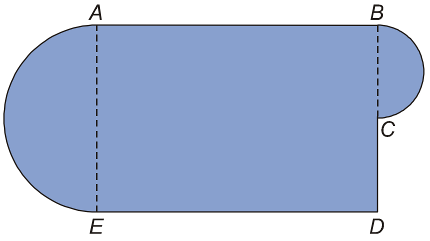
Ejercicio nº 40.-

Calcula el volumen total de esta figura:



Ejercicio nº 41.-

Calcula el máximo volumen, en metros cúbicos, que puede tener una piscina cuya base tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura, siendo la profundidad constante e igual a 1,6 metros:



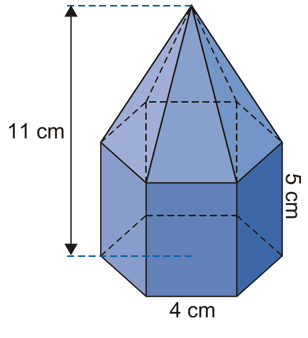
$\overline{ED} = 12$ m

$\overline{DC} = 4$ m

$\overline{BE} = 14,4$ m

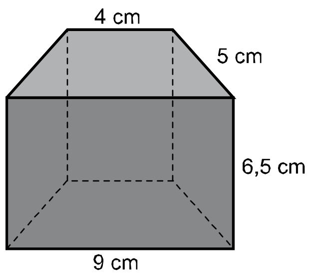
Ejercicio nº 42.-

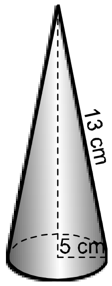
Calcula el volumen de la siguiente figura:



Ejercicio nº 43.-

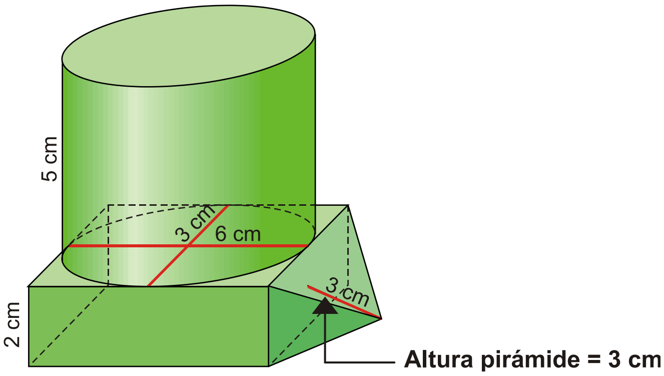
Halla el volumen de las siguientes figuras:





Ejercicio nº 44.-

Halla el volumen total de la siguiente figura:



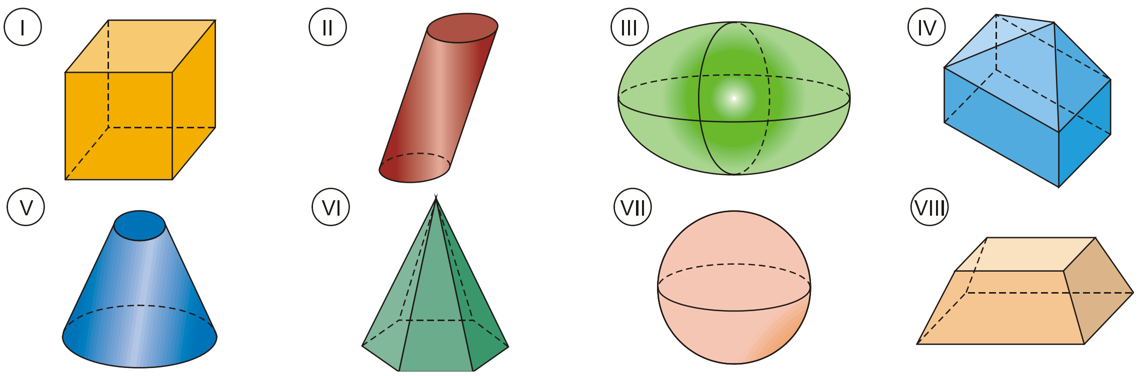
Ejercicio nº 45.-

Halla razonadamente el volumen de un tronco de cono cuyas dimensiones son: radios de las bases, 5 cm y 4 cm; altura, 2,5 cm.

SOLUCIONES EJERCICIOS DE POLIEDROS

Ejercicio nº 1.-

a) De los siguientes cuerpos geométricos, di cuáles son poliedros y cuáles no. Razona tu respuesta.



b) ¿Cuál es la relación (llamada fórmula de Euler) que hay entre el número de caras, de vértices y de aristas en un poliedro simple?

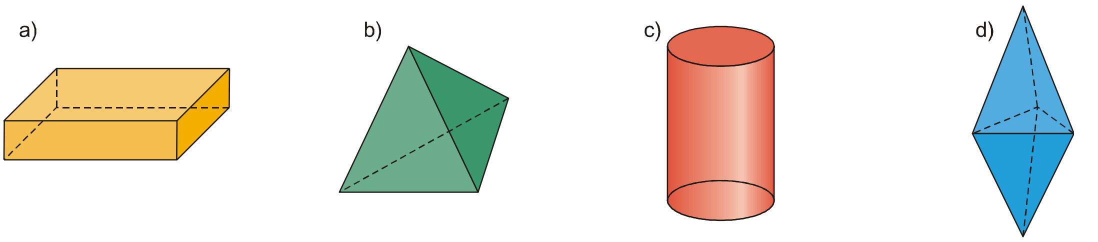
Solución:

a) Son poliedros I, IV, VI y VIII, pues son cuerpos geométricos cerrados, limitados por caras planas, que son polígonos.

b) En un poliedro simple, si c es el número de caras, v el de vértices y a el de aristas, se cumple la siguiente relación (llamada fórmula de Euler): $c + v - a = 2$.

Ejercicio nº 2.-

Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes figuras son poliedros regulares o no:



(4 triángulos equiláteros) (6 triángulos equiláteros)

Solución:

a) No es regular, pues sus caras no son iguales.

b) Sí es regular. Se trata de un tetraedro.

c) No es un poliedro, pues sus caras no son planas, no son polígonos.

d) No es regular. Aunque sus caras sean triángulos equiláteros, en unos vértices concurren tres caras y, en otros, cuatro.

Ejercicio nº 3.-

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En las que sean falsas, explica por qué:

a) Un cilindro es un poliedro.

b) En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras.

c) Una pirámide de base pentagonal es un poliedro.

d) Un poliedro tiene al menos diez aristas.

e) Una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular.

Solución:

a) **Falsa.** Un poliedro está limitado por caras planas, que son polígonos.

b) **Verdadera.**

c) **Verdadera.**

d) **Falsa.** El tetraedro es un poliedro y tiene seis aristas.

e) **Falsa.** Sí es un poliedro, pero no es regular, pues sus caras no son iguales (la base es un cuadrado y las caras laterales son triángulos).

Ejercicio nº 4.-

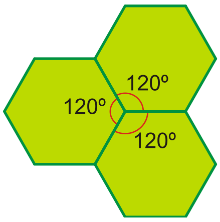
a) ¿Existe algún poliedro regular cuyas caras sean pentágonos regulares? Si existe alguno, di cuál es; y si no existe, explica por qué.

b) ¿Existe algún poliedro regular cuyas caras sean hexágonos regulares? Si existe alguno, di cuál es; y si no existe, explica por qué.

Solución:

a) Sí existe, el dodecaedro tiene 12 caras que son pentágonos regulares.

b) No existe, pues tres hexágonos regulares encajan en el plano, sus ángulos suman $360°$ y no se puede formar un vértice:



$120° \cdot 3 = 360°$

Ejercicio nº 5.-

Completa:

a) Un poliedro simple con 6 caras y 8 vértices tiene un total de __________aristas.

b) ¿Qué relaciones hay entre dos poliedros duales? _______________________________

____.

c) El _________ y el octaedro son poliedros duales.

d) El dodecaedro y el ______________ son poliedros duales.

e) El _______________ es dual de sí mismo.

Solución:

a) 12 (se obtiene aplicando la fórmula de Euler: $c + v - a = 2$; queda $6 + 8 - a = 2 \rightarrow a = 12$).

b) Dos poliedros duales tienen el mismo número de aristas. Y el número de caras de cada uno de ellos coincide con el número de vértices del otro.

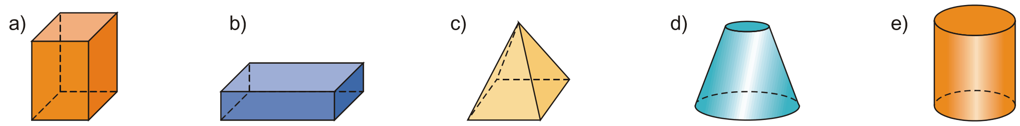
c) Cubo.

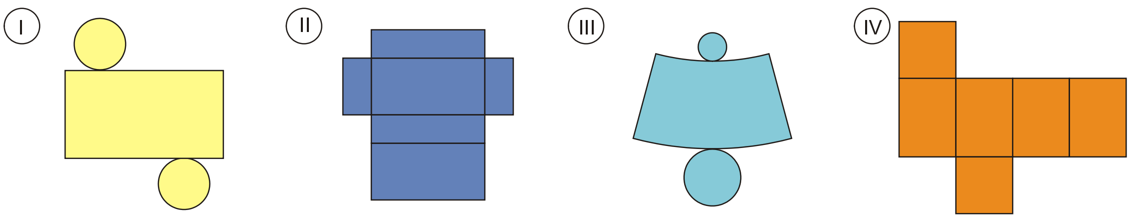
d) Icosaedro.

e) Tetraedro.

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Indica cuál de las siguientes figuras se corresponde con cada uno de estos desarrollos planos y dibuja el desarrollo plano que falta:



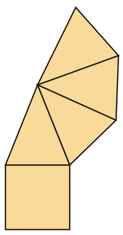


Solución:

a) IV

b) II

c)

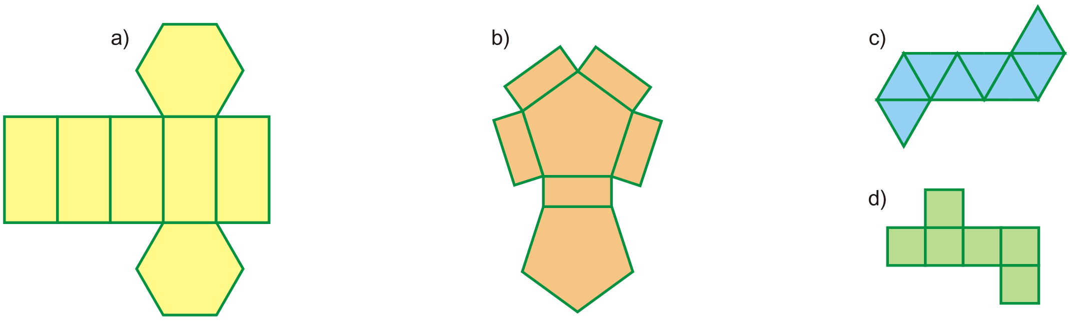


d) III

e) I

Ejercicio nº 7.-

De los siguientes desarrollos planos, indica cuáles corresponderían a prismas y cuáles no. En los que no, explica el porqué:



Solución:

a) No, pues debería tener 6 caras laterales y solo tiene 5.

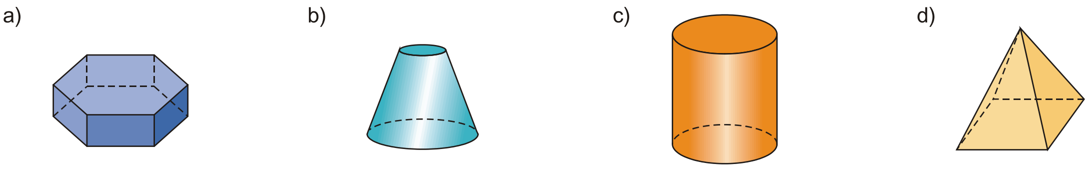
b) Sí.

c) No, pues sus caras laterales no son rectángulos.

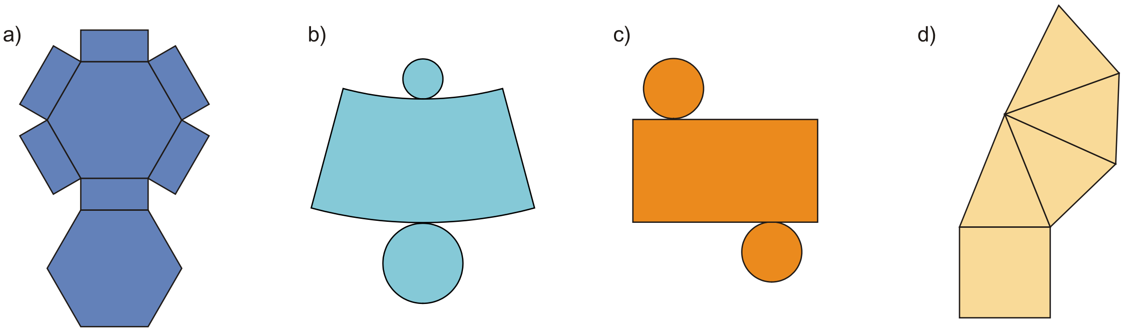
d) Sí.

Ejercicio nº 8.-

Dibuja el desarrollo plano de cada una de estas figuras:



Solución:



Ejercicio nº 9.-

Dibuja cada una de estas figuras y su desarrollo plano:

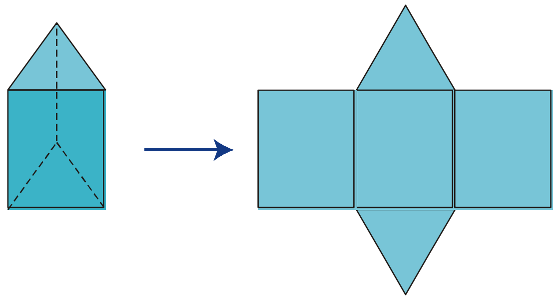
a) Prisma triangular regular.

b) Pirámide cuadrangular regular.

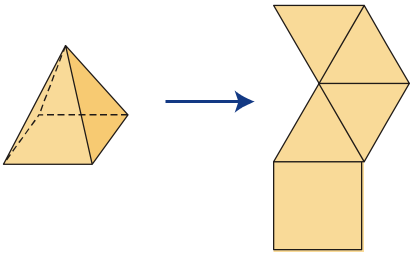
c) Cono.

Solución:

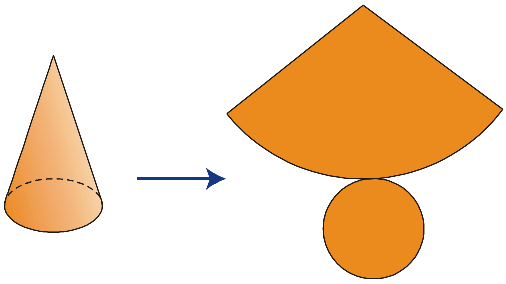
a)



b)

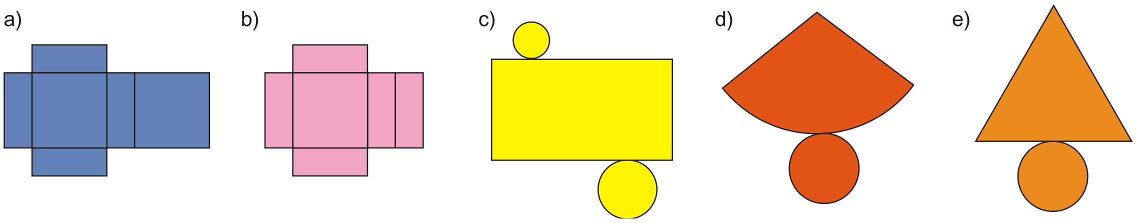


c)



<u>Ejercicio nº 10.-</u>

Indica, para cada una de estas figuras, si puede corresponder a un poliedro, a un cuerpo de revolución o a ninguno de ellos:



Solución:

a) Corresponde a un poliedro.

b) No corresponde a una figura cerrada; ni corresponde a un poliedro ni a un cuerpo de revolución.

c) No corresponde a un poliedro ni a un cuerpo de revolución (para que correspondiera a un cilindro, las dos bases tendrían que ser iguales).

d) Corresponde a un cono.

e) No corresponde a un poliedro ni a un cuerpo de revolución.

Ejercicio nº 11.-

a) Las dimensiones de un ortoedro son 5 cm, 6 cm y 7 cm, respectivamente. Sin hacer operaciones, explica por qué su diagonal no puede medir 5 cm.

b) Calcula cuánto mide la diagonal del ortoedro anterior.

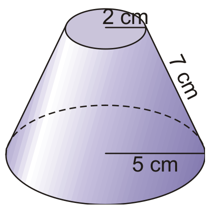
Solución:

a) La longitud de la diagonal es mayor que la de las aristas.

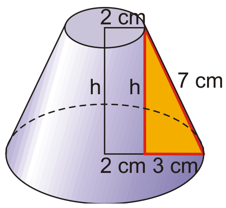
b) $d = \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{110} \approx 10,49$ cm

Ejercicio nº 12.-

Halla la altura de este tronco de cono:



Solución:



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

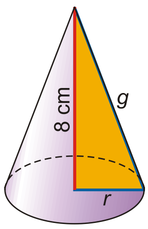
$7^2 = \text{h}^2 + 3^2 \ \rightarrow \ \text{h}^2 = 49 - 9 = 40$

$\text{h} = \sqrt{40} \approx 6,32$ cm

Ejercicio nº 13.-

Halla la generatriz de un cono, sabiendo que su altura es de 8 cm y que la longitud de la base es de 18,84 cm.

Solución:



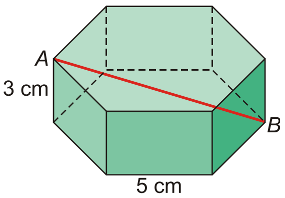
Longitud de la base $= 2\pi r = 18,84$ cm $\rightarrow r = \dfrac{18,84}{2\pi} = 3$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

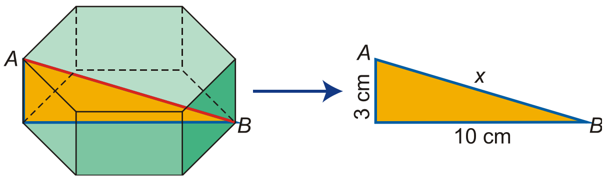
$g^2 = 8^2 + r^2 = 8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73 \ \rightarrow \ g = \sqrt{73} \approx 8,54$ cm

Ejercicio nº 14.-

Halla la longitud del segmento *AB*:



Solución:



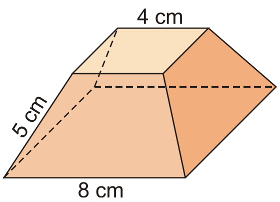
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 10^2 = 9 + 100 = 109$$

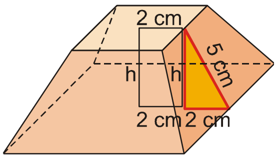
$$x = \sqrt{109} \approx 10,44 \text{ cm}$$

Ejercicio nº 15.-

Halla la altura del siguiente tronco de pirámide con bases cuadradas:



Solución:



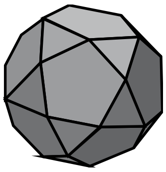
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = h^2 + 2^2 \;\rightarrow\; h^2 = 25 - 4 = 21$$

$$h = \sqrt{21} \approx 4,58 \text{ cm}$$

Ejercicio nº 16.-

Observa el siguiente poliedro y descríbelo. Identifica de qué poliedros regulares se puede partir así como el tipo de truncamiento realizado para obtener este poliedro. ¿Cómo se llama?



Solución:

Es un poliedro semirregular; en cada vértice concurren 2 pentágonos y 2 triángulos.

Este poliedro se obtiene al truncar todos los vértices del dodecaedro o del icosaedro mediante planos que pasan por los puntos medios de las aristas abyacentes.

Se llama pues icosidodecaedro y tiene en total 12 caras que son pentágonos y 20 caras triangulares.

Ejercicio nº 17.-

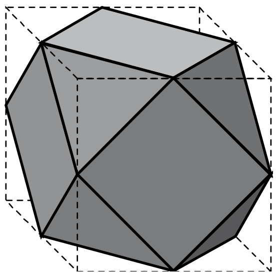
Partiendo del cubo, dibuja el poliedro que se obtiene en cada caso, nómbralo y descríbelo:

a) Truncando por los puntos medios de las aristas del cubo.

b) Truncando de la forma que cada cara se transforme en un octógono regular.

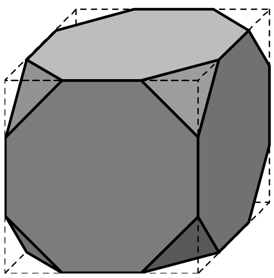
Solución:

a)



Cuboctaedro. Poliedro semirregular: en cada vértice concurren 2 cuadrados y 2 triángulos. En total tienen 6 caras cuadradas y 8 triangulares.

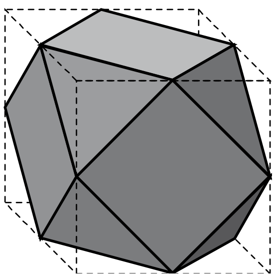
b)



Cubo truncado. Poliedro semirregular: en cada vértice concurren 2 octógonos y 1 triángulo. En total hay 6 caras octogonales y 8 triangulares.

Ejercicio nº 18.-

Observa el siguiente poliedro y descríbelo. Identifica de qué poliedros regulares se puede obtener así como el tipo de truncamiento que se realiza en ellos, para llegar a este poliedro. ¿Qué nombre recibe?



Solución:

Es un poliedro semirregular; en cada vértice concurren 2 cuadrados y 2 triángulos. Tiene 6 caras cuadradas y 8 caras triangulares.
Este poliedro se obtiene de truncar todos los vértices del cubo ó del octoédro mediante planos que pasan por los puntos medios de las aristas adyacentes.

Se llama pues, cuboctaedro.

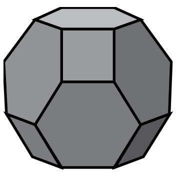
Ejercicio nº 19.-

Explica cómo se ha de truncar el octaedro para obtener el octaedro truncado. ¿Es un poliedro semirregular?

Solución:

Se ha de truncar cada arista a un tercio del vértice. De esta forma las caras se transforman en hexágonos regulares.

Es un poliedro semirregular formado por 8 hexágonos y 6 cuadrados.



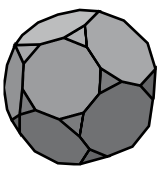
Ejercicio nº 20.-

Explica cómo se ha de truncar el dodecaedro para obtener el dodecaedro truncado. ¿Es un poliedro semirregular?

Solución:

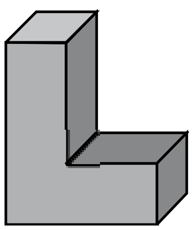
Se ha de truncar cada vértice dejando parte de la arista de forma que las caras se transformen en decágonos regulares.

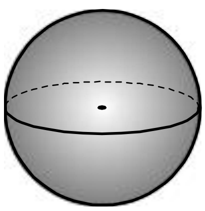
Es un poliedro semirregular formado por 12 decágonos y 20 triángulos. En cada vértice concurren 2 decágonos y 1 triángulo.



Ejercicio nº 21.-

a) **¿Cuáles son los planos de simetría de las siguientes figuras?**

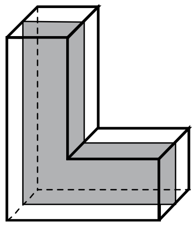


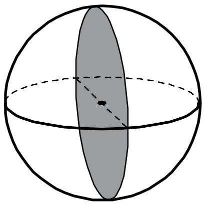


b) **Identifica los ejes de giro del octaedro.**

Solución:

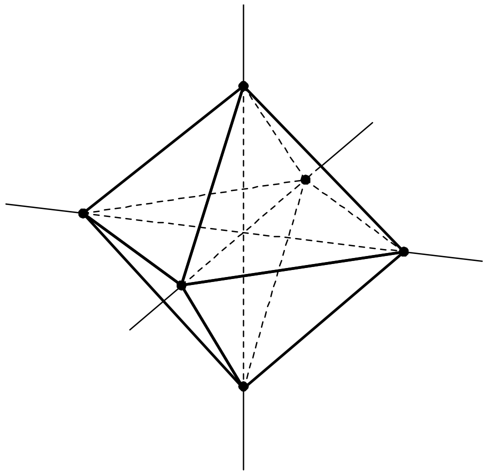
a)



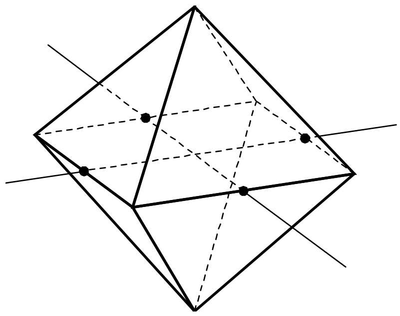


Cualquier plano que pase por el centro es plano de simetría.

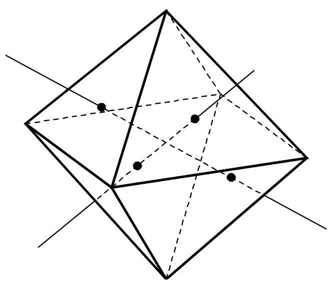
b) Conociendo los ejes de giro del cubo y aprovechando la dualidad que existe entre el cubo y el octaedro, podemos identificar los ejes de giro del octaedro:



Rectas que unen vértices opuestos.
Ejes de giro de orden 4. Hay tres.



Rectas que unen los puntos medios de dos aristas opuestas.
Ejes de giro de orden 2. Hay seis.



Rectas que unen los baricentros de caras opuestas.
Ejes de giro de orden 3. Hay cuatro.

<u>Ejercicio nº 22.-</u>

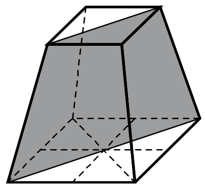
Dibuja las siguientes figuras espaciales e identifica en cada caso cuántos planos de simetría y ejes de giro tienen:

a) Tronco de pirámide cuadrangular regular.

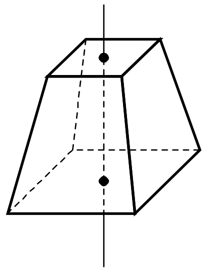
b) Cono.

Solución:

a)

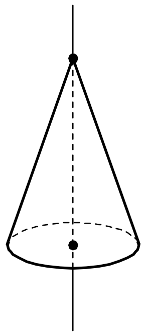


Su base es un cuadrado (tiene 4 ejes de simetría); por tanto el tronco de pirámide tendrá 4 planos de simetría.

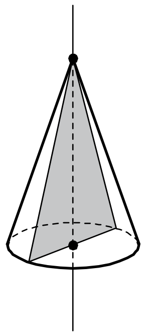


Eje de giro de orden 4.

b)



El eje de giro del cono une el vértice con el centro de la base.

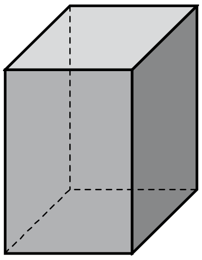


Cualquier plano que contenga al eje del cono, es plano de simetría. Hay por tanto infinitos.

Ejercicio nº 23.-

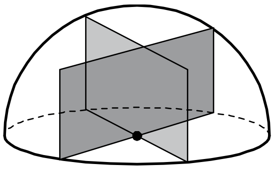
a) Dibuja una semiesfera e identifica sus planos de simetría.

b) La siguiente figura es un ortoedro con dos dimensiones iguales. ¿Cuáles son sus ejes de giro?¿De qué orden son?



Solución:

a)



Cualquier plano perpendicular a la base que pase por el centro es plano de simetría de la semiesfera.

b) – Un eje de giro de orden cuatro: la recta perpendicular a las caras cuadradas por su punto medio.

– Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras laterales paralelas.

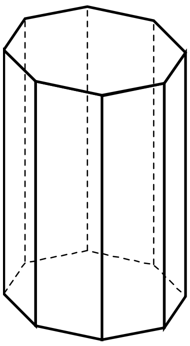
– Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas.

Ejercicio nº 24.-

El siguiente poliedro es un prisma octogonal regular.

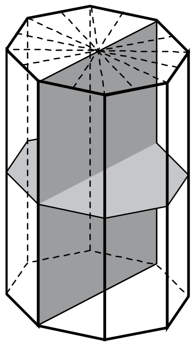
a) ¿Cuántos planos de simetría tiene?

b) ¿Qué ejes de giro tiene? ¿De qué orden?



Solución:

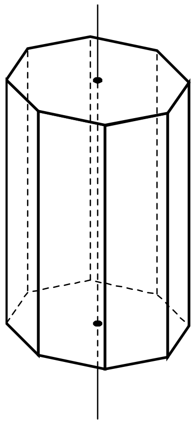
a)



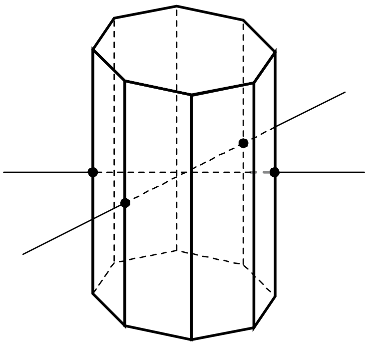
En total tiene 9 planos de simetría:

– Uno por cada eje de simetría de sus bases.
– Un plano de simetría paralelo a las dos bases que corta el prisma por la mitad.

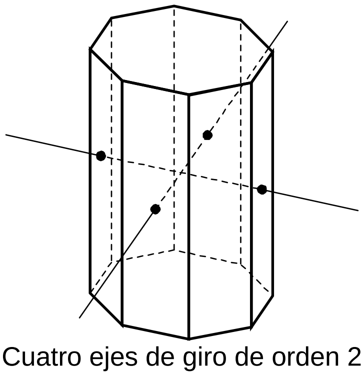
b)



Un eje de giro que pasa por el centro de las bases. Es de orden 8.



Cuatro ejes de giro de orden 2 que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas de las caras laterales.



Cuatro ejes de giro de orden 2 que pasan por el centro de dos caras laterales opuestas.

Ejercicio nº 25.-

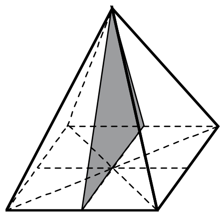
Dibuja las siguientes figuras espaciales e identifica en cada caso cuántos planos de simetría y ejes de giro tienen.

a) Pirámide cuadrangular regular.

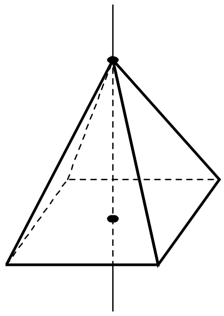
b) Tronco de cono.

Solución:

a)

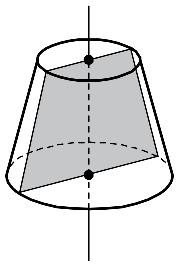


Tiene cuatro planos de simetría, uno por cada eje de simetría de su base (cuadrado).

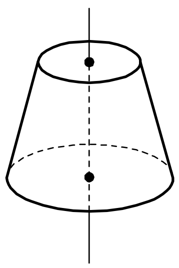


Tiene un eje de giro que pasa por el vértice y el punto medio de la base. Es de orden 4.

b)



Cualquier plano que contenga al eje del tronco de cono, es plano de simetría. Hay, por tanto, infinitos.



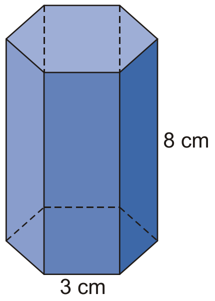
El eje de simetría pasa por el centro de las dos bases. Es de orden infinito.

SOLUCIONES CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS EN EL ESPACIO

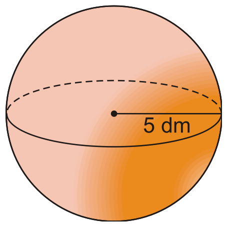
Ejercicio nº 26.-

Halla el área total de cada una de estas figuras:

a)

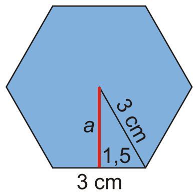


b)



Solución:

a)



- Hallamos el área de una base:
  $3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{9 - 2{,}25} = \sqrt{6{,}75} \approx 2{,}60$ cm

  $$\text{Área } = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{18 \cdot 2{,}60}{2} = 23{,}40 \text{ cm}^2$$

- El área de una cara lateral es: $A = 3 \cdot 8 = 24$ cm^2
- Área total $= 2 \cdot 23{,}40 + 6 \cdot 24 = 46{,}80 + 144 = 190{,}80$ cm^2

b) $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \approx 314{,}16$ dm^2

Ejercicio nº 27.-

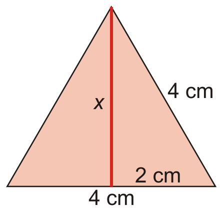
Halla la superficie total en cada caso:

a) Tetraedro regular de 4 cm de arista.

b) Cilindro de altura 4 cm y cuyo radio de la base mide 2 cm.

Solución:

a)



– Hallamos el área de una cara:
$4^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow x = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} \approx 3,46$ cm

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3,46}{2} = 6,92 \text{ cm}^2$$

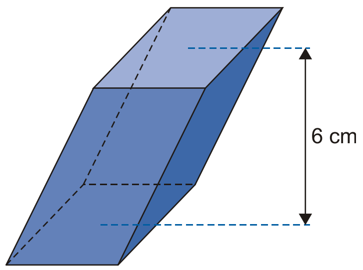
– Como tiene cuatro caras iguales:
Área total $= 4 \cdot 6,92 = 27,68$ cm^2

b) $A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 + 2\pi \cdot 2^2 = 16\pi + 8\pi = 24\pi \approx 75,36$ cm^2

<u>Ejercicio nº 28.-</u>

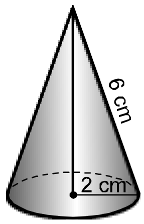
Calcula la superficie total de cada una de estas figuras:

a)



La base es un rombo de diagonales $D = 7$ cm y $d = 3$ cm.

b)

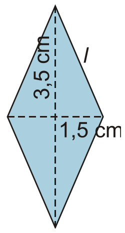


Solución:

a) – Área de una base $= \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{7 \cdot 3}{2} = 10,5$ cm^2

– Área de una de las caras laterales:

El lado del rombo es la base de la cara lateral:



$l^2 = 3{,}5^2 + 1{,}5^2 \;\rightarrow\; l = \sqrt{12{,}25 + 2{,}25} \approx 3{,}81 \text{ cm}$

$\text{Área de una cara lateral} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{3{,}81 \cdot 6}{2} = 11{,}43 \text{ cm}^2$

– Área total = $2 \cdot 10{,}5 + 4 \cdot 11{,}43 = 21 + 45{,}72 = 66{,}72 \text{ cm}^2$

b) – Área de la base = $\pi r^2 = 4\pi \approx 12{,}57 \text{ cm}^2$

– Área lateral = $\pi r g = \pi \cdot 2 \cdot 6 = 12\pi \approx 37{,}7 \text{ cm}^2$

– Área total = $4\pi + 12\pi = 16\pi \approx 50{,}27 \text{ cm}^2$

<u>Ejercicio nº 29.-</u>

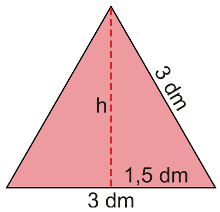
Halla el área total de cada una de estas figuras:

a) Icosaedro de 3 dm de arista.

b) Cilindro de 9 cm de altura y 3 cm de radio de la base.

Solución:

a)



– Área de una de las caras:
$h = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{9 - 2{,}25} = \sqrt{6{,}75} \approx 2{,}60 \text{ dm}$

$\text{Área} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{3 \cdot 2{,}60}{2} = 3{,}90 \text{ dm}^2$

– Como tiene 20 caras iguales:
Área total = $20 \cdot 3{,}90 = 78 \text{ dm}^2$

b) $A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 9 + 2\pi \cdot 3^2 = 54\pi + 18\pi = 72\pi \approx 226{,}19 \text{ cm}^2$

<u>Ejercicio nº 30.-</u>

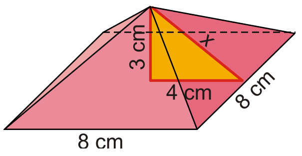
Calcula la superficie total en cada caso:

a) Pirámide cuadrangular regular de 3 cm de altura y 8 cm de lado de la base.

b) Esfera de 8 m de diámetro.

Solución:

a)



– Hallamos el valor de x para calcular el área de una de las caras laterales:

$$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

– Área de una cara lateral $= \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$

– Área de la base $= 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

– Área total $= 20 \cdot 4 + 64 = 80 + 64 = 144 \text{ cm}^2$

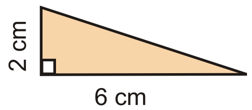
b) $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi \approx 201{,}06 \text{ cm}^2$

<u>Ejercicio nº 31.-</u>

Halla la superficie total de las siguientes figuras:

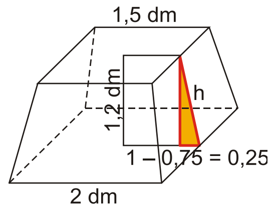
a) Tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases tienen de lados 2 dm y 1,5 dm, y cuya altura mide 1,2 dm.

b) El cono que se obtiene haciendo girar alrededor del cateto más largo el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

a)



$$h^2 = 1{,}2^2 + 0{,}25^2 = 1{,}44 + 0{,}0625 = 1{,}5025$$

$$h = \sqrt{1{,}5025} \approx 1{,}23 \text{ dm}$$

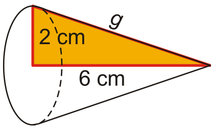
– Área de una cara lateral $= \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(2+1{,}5)\cdot 1{,}23}{2} \approx 2{,}15 \text{ dm}^2$

– Área de la base menor $= 1{,}5^2 = 2{,}25 \text{ dm}^2$

– Área de la base mayor $= 2^2 = 4 \text{ dm}^2$

– Área total $= 2{,}15 \cdot 4 + 2{,}25 + 4 = 14{,}85 \text{ dm}^2$

b)



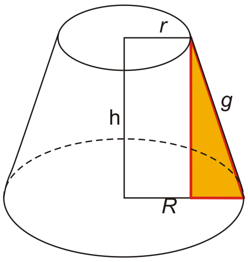
$$g=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}\approx 6{,}32\text{ cm}$$

$$\text{Área total}=\pi rg+\pi r^2=\pi\cdot 2\cdot 6{,}32+\pi\cdot 2^2=12{,}64\pi+4\pi=16{,}64\pi\approx 52{,}28\text{ cm}^2$$

Ejercicio nº 32.-

Calcula cuántos metros cuadrados de tela necesitaremos para las pantallas (en forma de tronco de cono) de dos lámparas iguales, sabiendo que la altura medirá 22 cm; la longitud de una base 72,22 cm y la de la otra 47,1 cm (toma $\pi = 3{,}14$).

Solución:



– El área lateral de un tronco de cono es:

$A=\pi(r+R)g$

– Hallamos el radio de la base menor:

$$2\pi r=47{,}1\text{cm}\rightarrow r=\frac{47{,}1}{2\pi}\approx\frac{47{,}1}{6{,}28}=7{,}5\text{ cm}$$

– Hallamos el radio de la otra base:

$$2\pi R=72{,}22\text{ cm}\rightarrow R=\frac{72{,}22}{2\pi}\approx\frac{72{,}22}{6{,}28}=11{,}5\text{ cm}$$

– Hallamos la generatriz:

$$g=\sqrt{\text{h}^2+(R-r)^2}=\sqrt{22^2+(11{,}5-7{,}5)^2}=\sqrt{22^2+4^2}=\sqrt{484+16}=\sqrt{500}\approx 22{,}36\text{ cm}$$

– Por tanto, el área lateral de uno de los troncos de cono es:

$A=\pi\,(7{,}5+11{,}5)\cdot 22{,}36\approx 1\,334\text{ cm}^2$

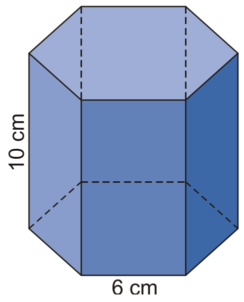
– Como necesitamos dos pantallas iguales:

$\text{Área total}=2\cdot 1\,334=2\,668\text{ cm}^2=0{,}2668\text{ m}^2\approx 0{,}27\text{ m}^2$

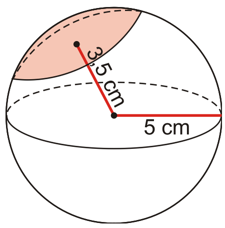
Ejercicio nº 33.-

Calcula el área total de:

a) Una pirámide regular cuya base y altura coinciden con las del siguiente prisma:

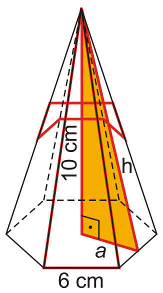


b) El siguiente casquete esférico:

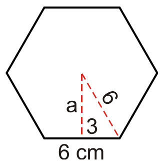


Solución:

a)



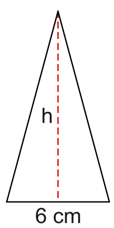
– Hallamos el área de la base:



$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \approx 5{,}20 \text{ cm}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{36 \cdot 5{,}20}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

– Hallamos el área de una de las caras laterales:



$$h^2 = 10^2 + a^2 \;\rightarrow\; h^2 = 100 + 27 = 127 \;\rightarrow\; h = \sqrt{127} \approx 11{,}27 \text{ cm}$$

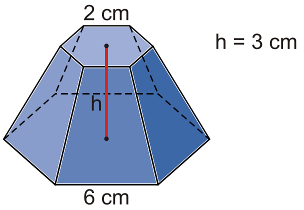
$$\text{Área cara lateral} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 11{,}27}{2} = 33{,}81 \text{ cm}^2$$

– Área total $= 93{,}6 + 6 \cdot 33{,}81 = 93{,}6 + 202{,}86 = 296{,}46 \text{ cm}^2$

b) $A = 2\pi r h = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 - 3{,}5) = 2\pi \cdot 5 \cdot 1{,}5 = 15\pi \approx 47{,}12 \text{ cm}^2$

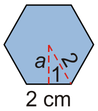
<u>Ejercicio nº 34.-</u>

Halla el área total de este tronco de pirámide:



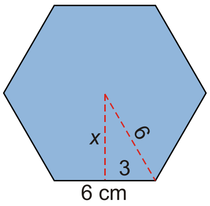
Solución:

– Hallamos el área de cada una de las dos bases:



$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \text{ cm}$$

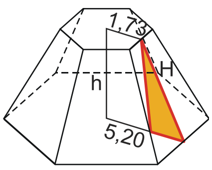
$$\text{Área base menor} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2 = A_1$$



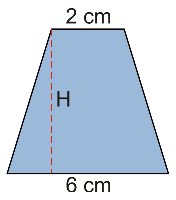
$$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \approx 5{,}20 \text{ cm}$$

$$\text{Área base mayor} = \frac{P' \cdot x}{2} = \frac{36 \cdot 5{,}20}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2 = A_2$$

– Hallamos el área de una de las caras laterales:



$$H = \sqrt{3^2 + 3{,}47^2} = \sqrt{9 + 12{,}0409} \approx 4{,}59 \text{ cm}$$



$$\text{Área de una cara lateral} = \frac{(B+b)\cdot \text{H}}{2} = \frac{(6+2)\cdot 4{,}59}{2} = 18{,}36\ \text{cm}^2$$

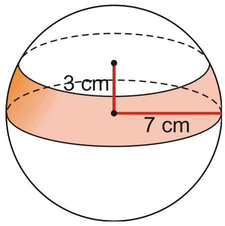
– Área total $= 10{,}38 + 93{,}6 + 6 \cdot 18{,}36 = 214{,}14\ \text{cm}^2$

Ejercicio nº 35.-

Halla el área total de:

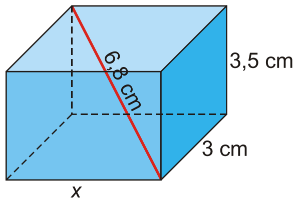
a) Un ortoedro que mide 3 cm de ancho; 3,5 cm de alto y cuya diagonal mide 6,8 cm.

b) La siguiente zona esférica:



Solución:

a)



$6{,}8^2 = x^2 + 3{,}5^2 + 3^2 \ \rightarrow\ 46{,}24 = x^2 + 12{,}25 + 9$

$x^2 = 46{,}24 - 12{,}25 - 9 = 24{,}99 \ \rightarrow\ x = \sqrt{24{,}99} \approx 5\ \text{cm}$

Por tanto, el área total es:

$A = 2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 3{,}5 + 5 \cdot 3{,}5) = 2(15 + 10{,}5 + 17{,}5) = 86\ \text{cm}^2$

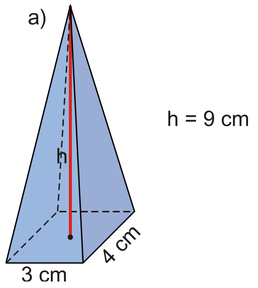
b) $A = 2\pi R\,\text{h} = 2\pi \cdot 7 \cdot 3 = 42\pi \approx 131{,}95\ \text{cm}^2$

SOLUCIONES CÁLCULO DE VOLUMENES

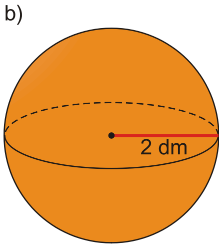
Ejercicio nº 36.-

Halla el volumen de estas figuras:

a)



b)



Solución:

a) $V = \frac{1}{3}\left(\text{Área base}\right)\cdot \text{altura} = \frac{1}{3}3\cdot 4\cdot 9 = 36 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} \approx 33{,}51 \text{ dm}^3$

Ejercicio nº 37.-

Halla el volumen de las siguientes figuras:

a) Un prisma de 7 cm de altura, cuyas bases son rombos de diagonales 6 cm y 4 cm.

b) Un cilindro de 5 cm de altura, cuyo radio de la base mide 2 cm.

Solución:

a) – Área de la base $= \frac{D\cdot d}{2} = \frac{6\cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$

– Volumen = (Área de la base) · altura = 12 · 7 = 84 cm^3

b) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \approx 62{,}83 \text{ cm}^3$

Ejercicio nº 38.-

Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

a) Un cono con 2 cm de radio de la base y 5 cm de altura.

b) Un prisma de base cuadrada, de 6 cm de altura, cuyo lado de la base mide 3 cm.

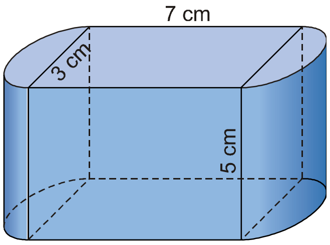
Solución:

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 5 = \frac{20\pi}{3} \approx 20{,}94 \text{ cm}^3$

b) $V = \left(\text{Área de la base}\right)\cdot \text{altura} = 3^2\cdot 6 = 54 \text{ cm}^3$

Ejercicio nº 39.-

Calcula el volumen del siguiente cuerpo:



Solución:

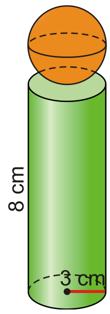
– Volumen del ortoedro $= 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105 \text{ cm}^3$

– Volumen del cilindro $= \pi r^2 h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 11{,}25\pi \approx 35{,}34 \text{ cm}^3$

– Volumen total $= 105 + 35{,}34 = 140{,}34 \text{ cm}^3$

Ejercicio nº 40.-

Calcula el volumen total de esta figura:



Solución:

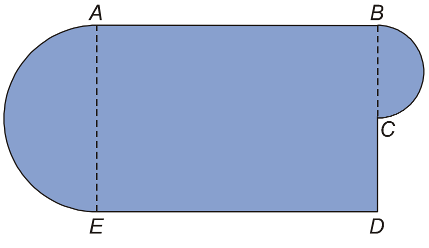
– Volumen del cilindro $= \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi \approx 226{,}19 \text{ cm}^3$

– Volumen de la esfera $= \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \approx 113{,}1 \text{ cm}^3$

– Volumen total $= 72\pi + 33\pi = 108\pi \approx 339{,}29 \text{ cm}^3$

Ejercicio nº 41.-

Calcula el máximo volumen, en metros cúbicos, que puede tener una piscina cuya base tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura, siendo la profundidad constante e igual a 1,6 metros:



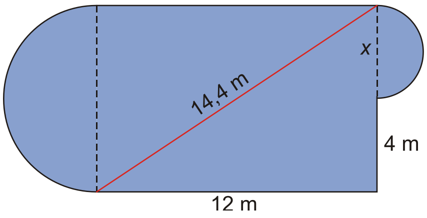
$\overline{ED} = 12 \text{ m}$

$\overline{DC} = 4 \text{ m}$

$\overline{BE} = 14{,}4 \text{ m}$

Solución:

– Hallamos el área de la base:



$$14{,}4^2 = 12^2 + (4+x)^2 \rightarrow 207{,}36 = 144 + 16 + x^2 + 8x$$

$$x^2 + 8x - 47{,}36 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 189{,}44}}{2} = 3{,}96 \text{ m (la solución negativa no vale)}$$

$$\text{Área del semicírculo pequeño } = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3{,}96}{2}\right)^2 \approx 6{,}16 \text{ m}^2$$

$$\text{Área del semicírculo grande } = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{7{,}96}{2}\right)^2 \approx 24{,}88 \text{ m}^2$$

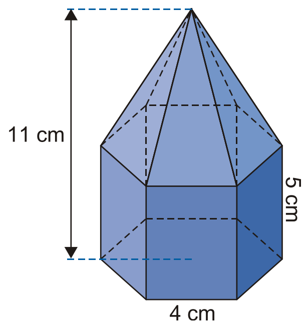
$$\text{Área del rectángulo } = 12 \cdot 7{,}96 = 95{,}52 \text{ m}^2$$

$$\text{Área de la base } = 6{,}16 + 24{,}88 + 95{,}52 = 126{,}56 \text{ m}^2$$

– $\text{Volumen} = (\text{Área de la base}) \cdot \text{altura} = 126{,}56 \cdot 1{,}6 \approx 202{,}5 \text{ m}^3$

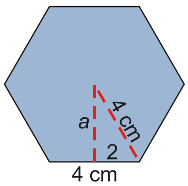
<u>Ejercicio nº 42.-</u>

Calcula el volumen de la siguiente figura:



Solución:

– Hallamos el área de la base:



$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \approx 3{,}46 \text{ cm}$$

$$\text{Área base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{24 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52 \text{ cm}^2$$

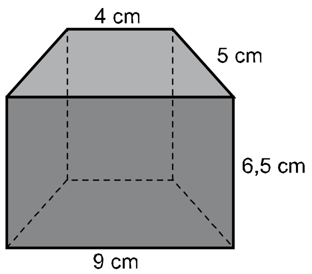
– Volumen del prisma = (Área de la base) · altura = 41,52 · 5 = 207,6 cm^3

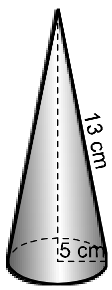
– Volumen de la pirámide $= \frac{1}{3}\left(\text{Área base}\right) \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 41{,}52 \cdot \left(11 - 5\right) = \frac{1}{3} \cdot 41{,}52 \cdot 6 = 83{,}04 \text{ cm}^3$

– Volumen total = 207,6 + 83,04 = 290,64 cm^3

Ejercicio nº 43.-

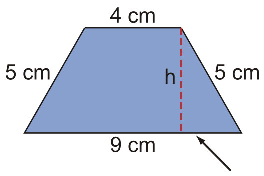
Halla el volumen de las siguientes figuras:





Solución:

a) Es un prisma cuya base es un trapecio:



$$\frac{9-4}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{25 - 6{,}25} = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33 \text{ cm}$$

– Área de la base $= \frac{\left(B + b\right) \cdot h}{2} = \frac{\left(9 + 4\right) \cdot 4{,}33}{2} \approx 28{,}15 \text{ cm}^2$

– Volumen = (Área base) · altura = 28,15 · 6,5 ≈ 182,98 cm^3

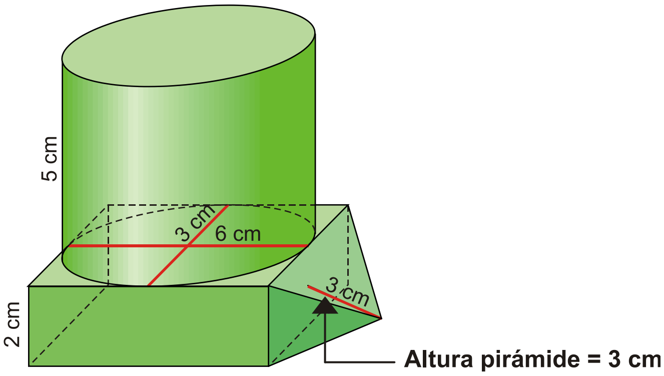
b) – Hallamos la altura, h, del cono:

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

– Volumen $= \frac{1}{3}\left(\text{Área base}\right) \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \approx 314{,}16 \text{ cm}^3$

Ejercicio nº 44.-

Halla el volumen total de la siguiente figura:



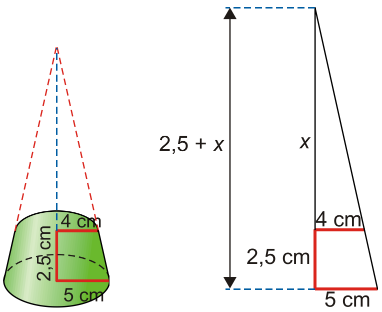
Solución:

- Área de la elipse $= \pi ab = \pi \cdot 6 \cdot 3 = 18\pi \approx 56{,}55$ cm^2
- Volumen del cilindro con base elíptica $=$ (Área de la base) $\cdot$ altura $= 56{,}52 \cdot 5 = 282{,}6$ cm^3
- Volumen del ortoedro $= 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ cm^3
- Volumen de la pirámide $= \dfrac{1}{3} 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6$ cm^3
- Volumen total $= 282{,}6 + 36 + 6 = 324{,}6$ cm^3

Ejercicio nº 45.-

Halla razonadamente el volumen de un tronco de cono cuyas dimensiones son: radios de las bases, 5 cm y 4 cm; altura, 2,5 cm.

Solución:



- Utilizando la semejanza de triángulos, hallamos la altura de los dos conos:

$$\frac{2{,}5+x}{5} = \frac{x}{4} \rightarrow 4(2{,}5+x) = 5x$$

$$10 + 4x = 5x \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

La altura del cono grande es 12,5 cm y la del cono pequeño, 10 cm.

- Volumen tronco de cono $= V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12{,}5 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 10 \approx 159{,}7$ cm^3